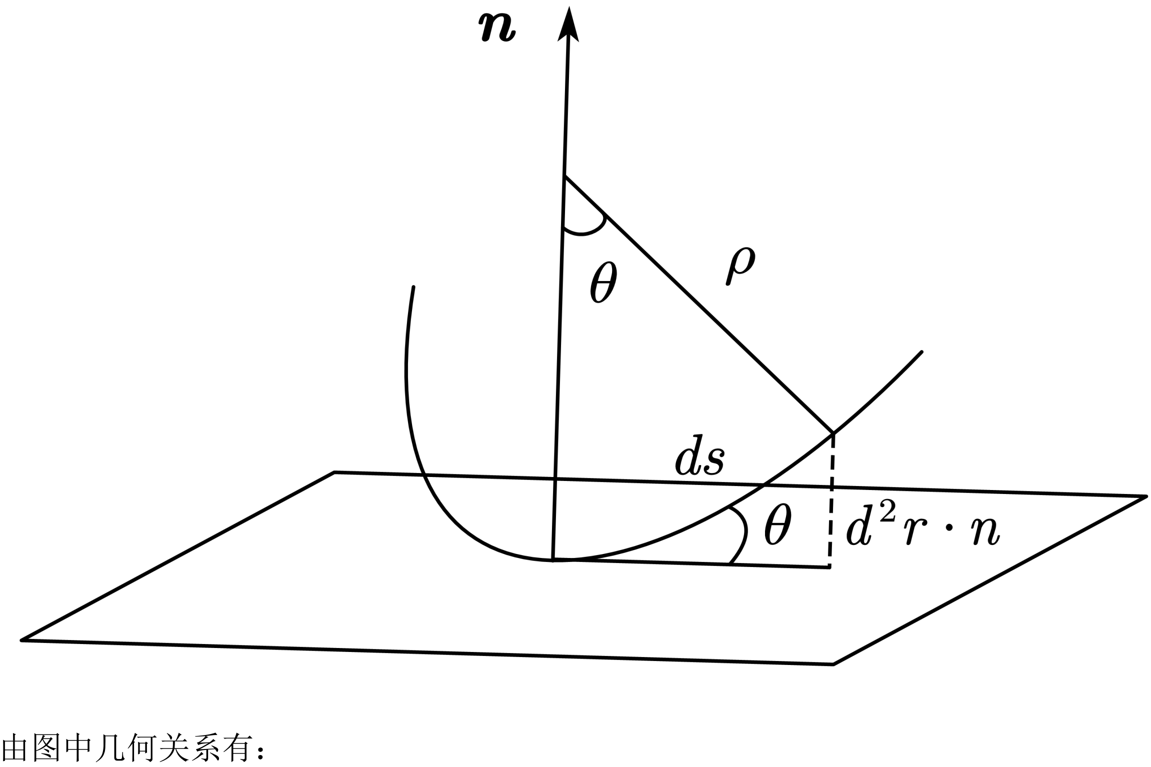
曲面论

曲面基本型

考虑曲面参数方程$r(u,v)$，微元线段的度量写为：

$$\mathrm{I}=dr\cdot dr=r_u\cdot r_u du^2+2r_u\cdot r_v dudv+r_v\cdot r_v dv^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \quad (1)$$

称为第一基本型。



由图中几何关系有：

$$\theta ds=\frac{1}{\rho}ds^2=\kappa_n dr\cdot dr=\kappa_n\mathrm{I}=d^2r\cdot n \qquad (2)$$

定义$d^2r\cdot n=\mathrm{II}$为第二基本型。

$$\mathrm{II}=d^2r\cdot n=(\partial_u du+\partial_v dv)^2 r\cdot n=r_{uu}\cdot ndu^2+2r_{uv}\cdot ndudv+r_{vv}\cdot ndv^2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 \quad (3)$$

法曲率κ_n表示为：$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

总结：

$$\begin{cases} \mathrm{E}=r_u\cdot r_u \\ \mathrm{F}=r_u\cdot r_v \\ \mathrm{G}=r_v\cdot r_v \\ \mathrm{L}=r_{uu}\cdot n=-r_u\cdot n_u \\ \mathrm{M}=r_{uv}\cdot n=-r_u\cdot n_v=-r_v\cdot n_u \\ \mathrm{N}=r_{vv}\cdot n=-r_v\cdot n_v \\ \kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{L}du^2+2\mathrm{M}dudv+\mathrm{N}dv^2}{\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}dudv+\mathrm{G}dv^2} \end{cases} \tag{4}$$

显然$\frac{du}{dv}$决定了曲面上法曲率的方向。

主曲率 平均曲率 高斯曲率

关注法曲率的极值，令$du/dv=p$，有：

$$\left(\kappa_n\mathrm{E}-\mathrm{L}\right)p^2+2\left(\kappa_n\mathrm{F}-\mathrm{M}\right)p+\kappa_n\mathrm{G}-\mathrm{N}=0 \tag{5}$$

二次方程有解，必然$\Delta\geq 0$。

$$\left(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2\right)\kappa_n^2-(\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL})\kappa_\mathrm{n}+\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2\leq 0 \tag{6}$$

由Cauchy不等式必然有：$(r_u\cdot r_v)^2\leq|r_u|^2|r_v|^2$即$\mathrm{F}^2\leq\mathrm{EG}$。二次项系数大于零，二次型小于零，$k_n$被限制在两个零点之间。

主曲率的极大极小值分别为：

$$\begin{cases} \kappa_1=\frac{(\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL})+\sqrt{(\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL})^2-4\left(\mathrm{F}^2-\mathrm{EG}\right)\left(\mathrm{M}^2-\mathrm{LN}\right)}}{2\left(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2\right)} \\ \kappa_2=\frac{(\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL})-\sqrt{(\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL})^2-4\left(\mathrm{F}^2-\mathrm{EG}\right)\left(\mathrm{M}^2-\mathrm{LN}\right)}}{2\left(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2\right)} \\ \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\frac{\mathrm{EN}-2\mathrm{FM}+\mathrm{GL}}{2\left(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2\right)} \\ \kappa_1\kappa_2=\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \end{cases} \tag{7}$$

$\mathrm{K}=\kappa_1\kappa_2$称为高斯曲率，$\mathrm{H}=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$称为平均曲率。

Gauss Theorem Egregium

$$\begin{cases} \mathrm{L}=\frac{<\mathrm{r}_{uu},\mathrm{r}_u,\mathrm{r}_v>}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \\ \mathrm{M}=\frac{<\mathrm{r}_{uv},\mathrm{r}_u,\mathrm{r}_v>}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \\ \mathrm{N}=\frac{<\mathrm{r}_{vv},\mathrm{r}_u,\mathrm{r}_v>}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} \end{cases} \tag{8}$$

第二基本型的行列式可以写作：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2 &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{r}_{vv} & \frac{\mathrm{E}_u}{2} & \mathrm{F}_u-\frac{\mathrm{E}_v}{2} \\ \mathrm{F}_v-\frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_v}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{r}_{uv} & \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \frac{\mathrm{G}_u}{2} \\ \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{r}_{vv}-\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{r}_{uv} & \frac{\mathrm{E}_u}{2} & \mathrm{F}_u-\frac{\mathrm{E}_v}{2} \\ \mathrm{F}_v-\frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_v}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \frac{\mathrm{G}_u}{2} \\ \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathrm{F}_{uv}-\frac{\mathrm{E}_{vv}+\mathrm{G}_{uu}}{2} & \frac{\mathrm{E}_u}{2} & \mathrm{F}_u-\frac{\mathrm{E}_v}{2} \\ \mathrm{F}_v-\frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_v}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \frac{\mathrm{G}_u}{2} \\ \frac{\mathrm{E}_v}{2} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{\mathrm{G}_u}{2} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

因此高斯曲率之与第一基本型（曲面的度量）有关，意味着当曲面不伸长（由弯曲能主导）时，高斯曲率不变。

曲面的结构方程

类似于Frenet Frame，考虑到n为单位法矢量，切方向与自身垂直，曲面的结构方程可以写为：

$$
\begin{cases} \partial_\alpha r = r_\alpha \\ r_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \\ n_\alpha = -b^\gamma_\alpha r_\gamma \end{cases} \tag{10}
$$

可以看出，b就是第二基本型的系数。

考虑导数可交换性，首先对于n，有：

$$
\begin{aligned}
& n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} \\
& \left(b^\gamma_{\alpha\beta} + b^\xi_\alpha \Gamma^\gamma_{\xi\beta}\right) r_\gamma + b^\xi_\alpha b_{\xi\beta} n = \left(b^\gamma_{\beta\alpha} + b^\xi_\beta \Gamma^\gamma_{\xi\alpha}\right) r_\gamma + b^\xi_\beta b_{\xi\alpha} n
\end{aligned} \tag{11}
$$

对比系数得到：

$$
\begin{cases} b^\gamma_{\alpha\beta} + b^\xi_\alpha \Gamma^\gamma_{\xi\beta} = b^\gamma_{\beta\alpha} + b^\xi_\beta \Gamma^\gamma_{\xi\alpha} \\ b^\xi_\alpha b_{\xi\beta} = b^\xi_\beta b_{\xi\alpha} \end{cases} \tag{12}
$$

（10）中第二式自然满足，第一式称为Codazzi方程。

对于r有：

$$
\begin{aligned}
r_{\alpha\beta\gamma} &= \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta,\gamma} r_{\xi} + b_{\alpha\beta,\gamma} n + \Gamma^{p}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{p\gamma} r_{\xi} + \Gamma^{p}_{\alpha\beta} b_{p\gamma} n - b_{\alpha\beta} b^{\xi}_{\gamma} r_{\xi} \\
&= \left(\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{p}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{p\gamma} - b_{\alpha\beta} b^{\xi}_{\gamma}\right) r_{\xi} + \left(\Gamma^{p}_{\alpha\beta} b_{p\gamma} + b_{\alpha\beta,\gamma}\right) n = r_{\alpha\gamma\beta} \\
&\left(\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{p}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{p\gamma} - b_{\alpha\beta} b^{\xi}_{\gamma}\right) r_{\xi} + \left(\Gamma^{p}_{\alpha\beta} b_{p\gamma} + b_{\alpha\beta,\gamma}\right) n = \left(\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{p}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{p\beta} - b_{\alpha\gamma} b^{\xi}_{\beta}\right) r_{\xi} + \left(\Gamma^{p}_{\alpha\gamma} b_{p\beta} + b_{\alpha\gamma,\beta}\right) n
\end{aligned} \tag{13}
$$

对比系数得到：

$$
\begin{cases}
\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{p}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{p\gamma} - b_{\alpha\beta} b^{\xi}_{\gamma} = \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{p}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{p\beta} - b_{\alpha\gamma} b^{\xi}_{\beta} \\
\Gamma^{p}_{\alpha\beta} b_{p\gamma} + b_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^{p}_{\alpha\gamma} b_{p\beta} + b_{\alpha\gamma,\beta}
\end{cases} \tag{14}
$$

（12）中第一式称为Gauss方程，第二式称为Codazzi方程。

现在证明（12）中第二式与（10）中第一式相同。

Christoffel记号可以表示为：

$$
g_{\gamma\xi}\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}\cdot r_{\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \tag{15}
$$

记$g^{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = Identity\, matirx$，有：

$$
\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}\cdot r_{\gamma} g^{\xi\gamma} = \frac{1}{2} g^{\xi\gamma}\left(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}\right) \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
b^{\gamma}_{\alpha\beta} + b^{\xi}_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\xi\beta} &= b^{\gamma}_{\beta\alpha} + b^{\xi}_{\beta}\Gamma^{\gamma}_{\xi\alpha} \\
\Gamma^{p}_{\alpha\beta} b_{p\gamma} + b_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma^{p}_{\alpha\gamma} b_{p\beta} + b_{\alpha\gamma,\beta}
\end{aligned} \tag{17}
$$

……………………………………………………………………………………………………

Gauss方程可以记为：

$$
R_{\gamma\alpha}{}^{\xi}{}_{\beta} = \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{p}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{p\gamma} - \Gamma^{p}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{p\beta} = b_{\alpha\beta} b^{\xi}_{\gamma} - b_{\alpha\gamma} b^{\xi}_{\beta} \tag{18}
$$

$$
R_{\alpha\beta\delta\gamma} = g_{\xi\delta} R_{\alpha\beta}{}^{\xi}{}_{\gamma} = b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} \tag{19}
$$

可以看出黎曼曲率张量具有大对称性同时具有小反对称性。

由于二维曲面只有两个指标，同时考虑到黎曼曲率张量的小反对称性，因此二维只有一个不为零的黎曼曲率张量：

$$
R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{12} \tag{20}
$$

即二维曲面的Gauss方程。

Gauss曲率表示为：

$$
\mathrm{K} = \frac{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = \frac{\mathrm{R}_{1212}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} R_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{21}
$$

黎曼曲率即为高斯曲率乘以第一基本型的行列式。

$$g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha\beta\delta\gamma}=g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\left(b_{\alpha\delta}b_{\beta\gamma}-b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}\right)=b_{\alpha}^{\alpha}b_{\beta}^{\beta}-b_{\alpha}^{\beta}b_{\beta}^{\alpha}=tr\left(W^{2}\right)-tr(W)^{2}=2K \quad (22)$$

有趣的是板的能量可以写为：

$$energy=\frac{1}{2}D\left(\nu tr\left(W^{2}\right)+(1-\nu)\,tr(W)^{2}\right)=D\left(\nu\mathrm{K}+2\mathrm{H}^{2}\right) \quad (23)$$

能否把杆和板的形式统一起来？

1 如果把无泊松效应的曲面定义为理想曲面，可以看出同时为理想曲面和极小曲面的弹性曲面能量为零。

2 对于理想曲面，平均曲率取极小时能量取极小值，这正是Marie-Sophie Germain首次考虑弹性板时的能量形式。此外数学中寻找的恒平均曲率曲面正是不考虑泊松效应时的等能量弹性曲面。

曲面结构方程的简化形式

首先考虑Codazzi方程：

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{p}b_{p\gamma}+b_{\alpha\beta,\gamma}=\Gamma_{\alpha\gamma}^{p}b_{p\beta}+b_{\alpha\gamma,\beta} \quad (24)$$

可以看出β,γ必然不同，此外只有12和21两种选择。

不妨令$\beta=1;\gamma=2$，α分别等于1，2得到：

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{1}\mathrm{L}+\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\mathrm{M}-\Gamma_{11}^{2}\mathrm{N}=\mathrm{L}_{v}-\mathrm{M}_{u}\\ \Gamma_{22}^{1}\mathrm{L}+\left(\Gamma_{21}^{1}-\Gamma_{22}^{2}\right)\mathrm{M}-\Gamma_{21}^{2}\mathrm{N}=\mathrm{M}_{v}-\mathrm{N}_{u}\end{aligned} \quad (25)$$

即为Codazzi-Mainardi方程。

由黎曼张量的对称性，有：

$$R_{1212}=\mathrm{LN}-\mathrm{M}^{2} \quad (26)$$

Gauss方程为：

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^{2}}{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^{2}} \quad (27)$$

Christoffel记号与Gauss参数的关系：

由$\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}=r_{\alpha\beta}\cdot r_{\gamma}g^{\xi\gamma}=\frac{1}{2}g^{\xi\gamma}\left(g_{\beta\gamma,\alpha}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\alpha\beta,\gamma}\right)$以及$g^{\alpha\beta}=\frac{\begin{pmatrix}\mathrm{G} & -\mathrm{F}\\ -\mathrm{F} & \mathrm{E}\end{pmatrix}}{\det(a)}$，有：

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1}&=\frac{\mathrm{GE}_{u}+\mathrm{FE}_{v}-2\mathrm{FF}_{u}}{2\det(a)}\\
\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}&=\frac{\mathrm{GE}_{v}-\mathrm{FG}_{u}}{2\det(a)}\\
\Gamma_{22}^{1}&=\frac{2\mathrm{GF}_{v}-\mathrm{GG}_{u}-\mathrm{FG}_{v}}{2\det(a)}\\
\Gamma_{11}^{2}&=\frac{2\mathrm{EF}_{u}-\mathrm{EE}_{v}-\mathrm{FE}_{u}}{2\det(a)}\\
\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}&=\frac{\mathrm{EG}_{u}-\mathrm{FE}_{v}}{2\det(a)}\\
\Gamma_{22}^{2}&=\frac{\mathrm{EG}_{v}+\mathrm{FG}_{u}-2\mathrm{FF}_{v}}{2\det(a)}
\end{aligned} \tag{28}$$